ORGANISME INTERGOUVERNEMENTAL UNIVERSITE DE YAOUNDE II

IFORD

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES

Lauréat du Prix des Nations Unies pour la Population 2011

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE FEVRIER 2023

21 – 22 FEVIER 2023

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Concours Type A)

Durée : 4 heures

Date : 21 Février 2023

Documents non autorisés

Utilisation des calculatrices autorisée

Barème indicatif

Exercice 1 : 1,5 point

Exercice 2 : 2,0 points

Exercice 3 : 1,5 point

Exercice 4 : 2,0 points

Exercice 5 : 3,5 points

Exercice 6 : 1,5 point

Exercice 7 : 3,5 points

Exercice 8 : 4,5 points

IFORD• BP 1556 – Yaoundé (CAMEROUN)• Email : iford@iford-cm.org• Web : www.iford-cm.org
Tél. : (+237) 222 22 24 71 / 222 23 29 47 / 242 03 44 12 / 22 22 35 79• Fax : (+237) 222 22 67 93

Exercice 1 : **(1,5 point)**

On munit $R_+^* \times R$ d'une loi interne $*$ définie par $(x, y) * (x', y') = (xx', y + y')$ et d'une loi externe . à domaine d'opérateur dans R définie par $\lambda.(x, y) = (x^\lambda, \lambda y)$.

Montrer que $(R_+^* \times R, *, .)$ est un R- espace vectoriel.

Exercice 2 : **(2,0 points)**

Soient $m, n \in N^*$, $M = X^m - 1$ et $N = X^n - 1$ deux éléments de $R[X]$.

Déterminer le pgcd de M et N.

Exercice 3 : **(1,5 point)**

Soit $n \in N$ et pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_k = C_n^k X^k (1 - X)^{n-k} \in R[X]$.

Montrer que $(P_k)_{0 \le k \le n}$ est une base de $R_n[X]$.

Exercice 4 : **(2,0 points)**

On considère l'équation différentielle

(1) $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0,\ x \in R_+^*$

où y est une fonction de x qui vérifie $y(1) = y'(1) = 0,\ y''(1) = 2$.

1) Ecrire l'équation différentielle (2) vérifiée par la fonction Y de t définie par $Y(t) = y(e^t)$.

2) Résoudre l'équation différentielle (2) et en déduire la solution de (1).

3) Etablir le tableau de variation de la solution y.

Exercice 5 : **(3,5 points)**

On considère la fonction f définie par $f(t) = \frac{1}{t}(\ln t)\ln(1 - t)$.

1) Déterminer le domaine de définition D de f et trouver les limites de f lorsque t tend vers chacune des bornes de D.

2) Etudier la nature de l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)dt$.

3) a) Ecrire le développement de $f(t)$ sous la forme (1) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n \ln t$.

b) Etudier la variation de $t^n \ln t$ pour $t \in D$ et en déduire que $\forall t \in D, |t^n \ln t| \le \frac{1}{ne}$.

c) Montrer que $\forall t \in D, |\alpha_n t^n \ln t| \le u_n$, où u_n est le terme général d'une série numérique convergente.

4) A partir de l'expression (1) montrer que $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

<u>Exercice 6 :</u> (1,5 point)

Démontrer que si $x \in]0,1[$, e^x est compris entre $1+x$ et $\frac{1}{1-x}$. En déduire que, pour $x \in]1,+\infty[$, $\frac{1}{x}$ est compris entre $\ln\frac{x+1}{x}$ et $\ln\frac{x}{x-1}$.

Le nombre entier p étant fixé, trouver la limite de $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{np}$, lorsque n augmente indéfiniment.

<u>Exercice 7 :</u> (3,5 points)

On considère la suite de terme général $(\forall n \in N^*), v_{n,p} = \left(\frac{n-p}{n}\right)^n$, où p est un entier fixé.

1) Montrer que cette suite converge vers une limite λ_p telle que $(\forall n \in N^*), v_{n,p} \leq \lambda_p$. Calculer cette limite.

2) On étudie maintenant la suite de terme général

$$(n \geq 2),\ u_n = \sum_{p=1}^{n-1} v_{n,p} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

a) Déduire du 1) que la suite $\{u_n\}$ est majorée par un nombre λ.
b) Montrer que la suite $\{u_n\}$ est convergente.
c) Soit p un entier fixé tel que $p < n-1$; montrer que $u_n > \sum_{k=1}^{p} v_{n,k}$ et en déduire un minorant de $\mu = \lim_{n\to\infty} u_n$.
d) Calculer μ.

<u>Exercice 8 :</u> (4,5 points)

Une suite de nombre réels est dite suite arithmétique d'ordre 0 si tous ses termes sont égaux à une même constante non nulle. Une suite $\{u_n\}$ est dite arithmétique d'ordre p si la suite des différences $\{u_{n+1} - u_n\}$ est une suite arithmétique d'ordre $p-1$, $p \in N^*$.

1) Montrer que la suite de terme général $u_n = n^2$ est une suite arithmétique d'ordre 2.

2) Soit $P(X)$ un polynôme de degré p. Montrer que la suite $P(0), P(1), P(2), \ldots$ est une suite arithmétique dont on précisera l'ordre.

3) Montrer que si $u_0, u_1, u_2, \ldots$ est une suite arithmétique d'ordre p, il existe un polynôme P de degré p tel que $P(n) = u_n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

4) Montrer que si Q est un polynôme de degré q, il existe un polynôme P de degré $q+1$ tel que $Q(0) + Q(1) + \cdots + Q(n) = P(n)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

5) Montrer que la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ peut s'exprimer comme un polynôme de degré 3 en n. Trouver ce polynôme.

6) Soit $\{u_n\}$ une suite arithmétique d'ordre p. Que peut-on dire des suites extraites $\{u_{2n}\}, \{u_{n^2}\}$ et $\{u_{n^3}\}$?