ORGANISME INTERGOUVERNEMENTAL

UNIVERSITE DE YAOUNDE II

IFORD

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES

Lauréat du Prix des Nations Unies pour la Population 2011

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE FEVRIER 2023

21 – 22 FEVRIER 2023

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Concours Type B)

Durée : 4 heures

Date : 21 Février 2023

Documents non autorisés

Utilisation des calculatrices autorisée

Barème indicatif

Exercice 1 : 1,5 point

Exercice 2 : 1,0 point

Exercice 3 : 2,5 points

Exercice 4 : 2,5 points

Exercice 5 : 2,0 points

Exercice 6 : 2,0 points

Exercice 7 : 4,5 points

Exercice 8 : 4,0 points

IFORD•✉ BP 1556 – Yaoundé (CAMEROUN)• Email : iford@iford-cm.org• Web : www.iford-cm.org
Tél. : (+237) 222 22 24 71 / 222 23 29 47 / 242 03 44 12 / 22 22 35 79• Fax : (+237) 222 22 67 93

Exercice 1 : **(1,5 point)**

Soit $N(t)$ l'effectif d'une certaine population à l'instant t ($t \in R_+$). Etudier l'évolution de l'effectif d'une population qui vérifie l'équation différentielle $\frac{N'}{N} = a - bN$, $a \in R_+^*$ $b \in R_+^*$, $N(0) = N_0 \in \left]0, \frac{a}{b}\right[$.

Exercice 2 : **(1,0 point)**

Etant donné a et b scalaires, calculer le déterminant Δ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : **(2,5 points)**

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$y'' + y' - 2y = -6e^{-2x} - 6.$$

Décrire le comportement de cette solution générale lorsque $x \to +\infty$, et préciser s'il existe des solutions particulières pour lesquelles y admet un niveau d'équilibre, que l'on déterminera.

Exercice 4 : **(2,5 points)**

Pendant la durée d'une campagne électorale mettant en présence trois candidats A, B, C sont publiés les résultats de sondages effectués aux dates $1, 2, \dots, n, \dots$ On note a_n, b_n et c_n les proportions d'électeurs partisans respectivement des candidats A, B et C à la date n. Chaque sondage fait apparaître une modification de ces proportions telle que :

$(\forall n \in N)$, $X_{n+1} = MX_n$, où $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

1) Comment peut-on interpréter les colonnes de la matrice M ?

2) Sachant que $a_0 = 0{,}31$, $b_0 = 0{,}29$ et $c_0 = 0{,}40$, déterminer X_n et sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 5 : **(2,0 points)**

Soit E et K-espace vectoriel de dimension n, avec $n \geq 2$, des endomorphismes f et g, et une base B de E. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $i \neq j$, on pose :

$\alpha_{ij} = det_B\left(x_1, \dots, x_{i-1}. f(x_i). x_{i+1}, \dots, x_{j-1}. g(x_j). x_{j+1}, \dots, x_n\right)$.

Montrer qu'il existe $k \in K$ tel que $\sum_{i \neq j} \alpha_{ij} = k det_B(x_1, \dots, x_n)$ et calculer k.

<u>Exercice 6 :</u> (2,0 points)

Soit $E = R_n[X] = \{P \in R[X] / degP \leq n\}$.

On fixe un polynôme P de degré n et $n + 1$ nombre réels $\alpha_0,\ \alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux à deux distincts.

Montrer que les polynômes $Q_k = P(X + \alpha_k)$, $0 \leq k \leq n$, forment une base de $R_n[X]$.

<u>Exercice 7 :</u> (4,5 points)

On considère le système d'équations différentielles $x' = -x - y$; $y' = -4y - z$; $z' = 5y$ où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle t.

1) Ecrire ce système différentiel sous forme matricielle $\frac{dY}{dt} = AY$, où A et Y sont deux matrices que l'on déterminera.

2) a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? inversible ?

b) Déterminer trois vecteurs propres de A, indépendants, de première composante égale à 1.

c) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base formée des vecteurs propres. Ecrire la relation de similitude entre A et une matrice diagonale D que l'on déterminera.

3) Effectuer le changement $Z = P^{-1}Y$, les composantes $z_i (i = 1, 2, 3)$ de Z étant des fonctions de t. Déterminer les solutions complexes du nouveau système différentiel.

4) Donner les solutions complexes du système initial puis les solutions générales réelles du système initial.

<u>Exercice 8 :</u> (4,0 points)

Soit X une variable aléatoire réelle continue, de densité de probabilité f continue et admettant des moments de tout ordre. On note par $E\{X\}$ l'espérance mathématique de X et par m_k et μ_k ses moments respectivement non centrés et centrés d'ordre k :

$m_k = E\{X^k\}, \quad \mu_k = E\{X - E(X)\}^k,\ k \in N^*$.

On appelle $fonction\ génératrice$ des moments m_k de X, la fonction H_X définie par :

$$H_X(t) = E\{e^{tX}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx, \quad t \in R.$$

1) Exprimer les dérivées successives $H'_X(0),\ H''_X(0), \dots, H_X^{(n)}(0), \dots$ en fonction des moments m_k. On admet que la fonction H_X est développable en série entière ; écrire cette série entière en fonction des moments m_k.

2) On appelle $fonction\ génératrice\ des\ cumulants$ la fonction K_X définie par : $K_X(t) = \ln H_X(t),\ t \in R$. On admet que K_X est développable en série entière sous la forme $K_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k}{k!} t^k,\ \ (\forall t \in R)$, où x_k s'appelle $cumulant$ d'ordre k de X.

a) Exprimer les dérivées $K_X^{(n)}(t)$ en fonction des dérivées de $H_X(t)$ pour $n = 1, 2, 3$.

b) En déduire les expressions de X_k en fonction de m_k puis de μ_k pour $k = 0, 1, 2, 3$.

c) Application : si X suit une loi de Laplace-Gauss de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}},\ \ x \in R$, calculer $H_X(t)$ puis $K_X(t)$ et en déduire les cumulants de X.