



IFORD

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES

Lauréat du Prix des Nations Unies pour la Population 2011

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE FEVRIER 2023

21 – 22 FEVRIER 2023

EPREUVE DE PROBABILITES-STATISTIQUE

(Concours Type A)

Durée : 4 heures

Date : 22 Février 2023

Documents non autorisés

Utilisation des calculatrices autorisée

Barème indicatif

Exercice 1 : 1,5 point

Exercice 2 : 2,0 points

Exercice 3 : 1,5 point

Exercice 4 : 1,5 point

Exercice 5 : 3,0 points

Exercice 6 : 3,5 points

Exercice 7 : 2,5 points

Exercice 8 : 4,5 points

Exercice 1 : (1,5 point)

Vous vous promenez le long d'une voie ferrée, en pleine rêverie. Vous prenez soudain conscience d'un grand bruit, droit derrière vous. En quoi consiste l'erreur de première espèce ? L'erreur de deuxième espèce. Laquelle est la plus grave ? Que faites-vous ?

Exercice 2 : (2,0 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires suivant respectivement les lois $\chi^2(p)$ et $\chi^2(q)$ ($p > q$). Soit Z une variable aléatoire indépendante de Y , telle que $X = Y + Z$.

Montrer que Z suit une loi $\chi^2(p - q)$.

Exercice 3 : (1,5 point)

Une chaîne de fabrication produit 40 000 fours dont 32 000 (80%) sont bons, ne nécessitant donc aucune modification. Le service de contrôle-qualité qui ne connaît pas ces chiffres, prélève un échantillon aléatoire de 10 fours pour estimer la qualité de l'ensemble de la fabrication.

Quelle est la probabilité que dans cet échantillon on obtienne 5 fours défectueux et 5 bons ?

Exercice 4 : (1,5 point)

Les deux variables aléatoires X et Y ont la distribution conjointe $p(x, y)$ suivante :

x	y			
	10	20	30	40
20	0,04	0,08	0,08	0,05
40	0,12	0,24	0,24	0,15

Sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 : (3,0 points)

On suppose que les étudiants d'un cours de statistique ont des notes normalement distribuées autour d'une moyenne de 72 avec un écart type de 9.

- 1) Calculer la probabilité qu'un seul étudiant choisi au hasard ait une note supérieure à 80.
- 2) Calculer la probabilité qu'un échantillon aléatoire de 10 étudiants ait une note moyenne supérieure à 80.
- 3) Si la population n'était pas normale, quelle aurait été la réponse pour la question 2) ?

Exercice 6 : (3,5 points)

Supposer que pour un échantillon aléatoire de 4 familles on observe les revenus annuels et l'épargne correspondante suivante (en milliers de dollars) :

Famille	Revenu X	Epargne S
A	22	2,0
B	18	2,0
C	17	1,6
D	27	3,2

- 1) Estimer la droite de régression $S = \alpha + \beta X$.

- 2) Construire l'intervalle de confiance à 95% de la pente β .
- 3) Faire figurer sur un graphique les 4 points et la droite ajustée ; indiquer alors, le mieux possible, les diverses pentes acceptables, découlant du calcul de l'intervalle de confiance de la question 2).

Exercice 7 : (2,5 points)

Dans une grande université, on a constitué, en 1969, des échantillons indépendants de 5 professeurs hommes et 5 professeurs femmes, et relevé les traitements annuels ci-dessous (en milliers de dollars).

Femmes	Hommes
9	19
12	9
8	12
10	11
16	22

- 1) Calculer un intervalle de confiance pour la différence du traitement moyen entre hommes et femmes.
- 2) Dans quelle mesure une telle différence moyenne indique-t-elle une discrimination envers les femmes ?

Exercice 8 : (4,5 points)

En 1954 une expérience fut menée sur une grande échelle pour tester l'efficacité d'un nouveau vaccin contre la polio. Parmi les 740 000 enfants choisis dans les classes primaires à travers le pays A, 400 000 étaient volontaires. La moitié d'entre eux furent choisis au hasard pour recevoir une injection du vaccin, la moitié restante, une injection placebo d'eau salée. Les résultats furent les suivants :

Groupe	Nombre d'enfants	Nombre de cas de polio
Vaccinés	200 000	57
Placebo (témoins)	200 000	142
Non volontaires	340 000	157

- 1) Pour chacun des trois groupes, calculer le taux de polio (nombre de cas pour 100 000).
- 2) Estimer la réduction du taux de polio obtenue grâce à la vaccination, et donner l'intervalle de confiance à 95%.
- 3) Supposer que tous les volontaires ont été vaccinés, les non-volontaires constituant le groupe témoin :
 - a) Avant d'analyser les données, critiquer cette procédure.
 - b°) Quelles sortes d'informations obtiendrait-on ? Auraient-elles apporté la réponse correcte à la question 2) ?