ORGANISME INTERGOUVERNEMENTAL

UNIVERSITE DE YAOUNDE II

IFORD

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES

Lauréat du Prix des Nations Unies pour la Population 2011

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE FEVRIER 2023

21 – 22 FEVRIER 2023

EPREUVE DE PROBABILITES-STATISTIQUE

(Concours Type B)

Durée : 4 heures

Date : 22 Février 2023

Documents non autorisés

Utilisation des calculatrices autorisée

Barème indicatif

Exercice 1 : 1,5 point

Exercice 2 : 1,5 point

Exercice 3 : 2,0 points

Exercice 4 : 1,5 point

Exercice 5 : 1,5 point

Exercice 6 : 4,0 points

Exercice 7 : 3,5 points

Exercice 8 : 4,5 points

IFORD⬩✉ BP 1556 – Yaoundé (CAMEROUN)⬩ Email : iford@iford-cm.org⬩ Web : www.iford-cm.org
Tél. : (+237) 222 22 24 71 / 222 23 29 47 / 242 03 44 12 / 22 22 35 79⬩ Fax : (+237) 222 22 67 93

<u>Exercice 1 :</u> (1,5 point)

Soit l'expérience consistant à effectuer 4 fois le tir avec remise d'une boule à partir d'un sac qui en contient 130 : 10 blanches, 20 noires et 100 vertes. On s'intéresse aux quantités possibles de boules blanches tirées et à la probabilité que cela se produise.

1) Déterminer l'épreuve de $Bernouilli$ sous-jacente à cette expérience.

2) Si B représente le nombre de boules blanches tirées, déterminer sa loi de probabilité.

<u>Exercice 2 :</u> (1,5 point)

Le nombre de rhumes attrapés par un individu en l'espace d'un an est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Un vaccin préventif est mis sur le marché par une compagnie pharmaceutique. Lors de sa présentation au congrès des pharmaciens, la compagnie ne promettait pas « absence totale de rhumes durant l'année pour les vaccinés », mais affirmait plutôt que pour 75% des vaccinés, le paramètre λ serait abaissé à 3.

Un individu reçoit ce vaccin. Etant donné qu'il a attrapé exactement deux rhumes durant l'année, quelle est la probabilité que le vaccin ait eu l'effet escompté sur lui ?

<u>Exercice 3 :</u> (2,0 points)

Trois hommes font un travail similaire d'empaquetage. Le nombre de boîtes empaquetées par chacun, au cours de trois heures déterminées, est donné dans le tableau suivant :

Heure	Homme		
	A	B	C
11 - 12	24	19	20
13 - 14	23	17	14
16 - 17	25	21	17

Calculer le tableau ANOVA, en y incluant la probabilité critique pour les deux hypothèses nulles.

<u>Exercice 4 :</u> (1,5 point)

Un échantillon aléatoire de 4 notes est prélevé dans un amphithéâtre : 64, 66, 89 et 77. Dans un autre amphithéâtre, on tire de façon indépendante un échantillon aléatoire de 3 notes : 56, 71 et 53. Calculer l'intervalle de confiance pour la différence entre les deux moyennes des amphis, $\mu_1 - \mu_2$.

<u>Exercice 5 :</u> (1,5 point)

Un échantillon aléatoire de 7 femmes montrait une pente positive du taux de cholestérol dans le sang, selon l'âge. Si la pente des moindres carrés était de 0,024, avec un écart type de 0,010, quelle serait la pente bayésienne réduite ?

<u>Exercice 6 :</u> (4,0 points)

Dans une cafétéria, du lundi au vendredi inclusivement, le distributeur de lait fonctionne environ 800 fois par semaine. La quantité de liquide versé à chaque remplissage suit une loi normale de moyenne 225 ml et d'écart type 8 ml.

1) Quelle est la probabilité que la quantité moyenne de liquide contenue dans 20 verres remplis au hasard, durant une semaine donnée, soit de plus de 228 ml ?

2) Quelle est la probabilité qu'un verre déborde si sa capacité est de 235 ml ?

3) Déterminer un intervalle centré à la moyenne dans lequel on retrouvera 75% des volumes moyens de liquide contenu dans des échantillons de 20 verres remplis au hasard, durant la même semaine.

4) Le responsable de la cafétéria a reçu de nouveaux verres, lesquels ne peuvent contenir plus de 220 ml. Il sait que le distributeur doit subir un ajustement s'il ne veut pas qu'une majorité de verres débordent lors du remplissage. Si le technicien n'ajuste pas la dispersion, à combien doit-il ajuster la moyenne afin qu'au plus 10% d'un échantillon de 25 de ces nouveaux verres, remplis la même semaine, ne débordent lors du remplissage ?

Exercice 7 : (3,5 points)
Soit $X = (X_i)_{i=1 \text{ à } n}$, un vecteur aléatoire gaussien de dimension n, de loi $N(0, I_n)$. Soit $\theta = (\theta_i)_{i=1 \text{ à } n}$ un vecteur de R^n. On définit la variable aléatoire :

$$Y = \|X + \theta\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i + \theta_i)^2$$

Y suit une loi du khi-deux décentrée à n degrés de liberté et de paramètre d'excentricité (ou de décentrage) : $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 = \|\theta\|^2$
On la note : $\chi^2(n, \lambda)$.
1) Montrer que la loi de Y ne dépend que de la norme de θ et non de θ lui-même.
2) Calculer son espérance et sa variance.
3) Si $(X_i)_{i=1 \text{ à } n}$ sont n variables aléatoires indépendantes de lois respectives $N(m_i, \sigma_i)$. On dit que $U = \sum X_i^2$ suit une loi du khi-deux décentrée généralisée. Calculer $E(U)$ et $V(U)$.

Exercice 8 : (4,5 points)
Des tests effectués sur une surface particulièrement rugueuse afin de mesurer l'endurance des pneus de camions fabriqués selon un nouveau procédé. Or, sur cette surface, il s'avère que des crevaisons se produisent pour 25% de ces pneus. Pour le prochain essai, 15 de ces nouveaux pneus seront mis à l'épreuve.
1) Quelle est la probabilité que moins de 4 crevaisons auront lieu ?
2) Déterminer μ et σ, ainsi que la probabilité annoncée par l'inégalité de Chebyshev au sujet de l'intervalle $[\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma]$, et interpréter cette probabilité dans le contexte.
3) Si X représente le nombre de pneus crevés, déterminer $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ à l'aide du modèle suivi par X.
Deux lots de pneus sont formés : un contenant des pneus fabriqués selon le nouveau procédé, l'autre, des pneus fabriqués selon l'ancien. En examinant seulement les rainures des pneus, on sait que 60% des camionneurs affirmeraient préférer rouler avec des pneus provenant du lot A. Or, un autre test est effectué : un camionneur, ayant choisi à l'aveugle 10 pneus provenant d'un même lot, fera rouler son camion sur la surface rugueuse.
4) Sachant que le lot A contient des pneus de l'ancien procédé et que 30% de ces anciens pneus ne passaient pas le test de la surface rugueuse, calculer la probabilité que 2 pneus subissent une crevaison lors du test.